國立中央大學數學系

103學年度

數 值 組 博 士 班 入 學 考

題目共五題，每題二十分。

1. 簡答題（各五分，須說明原因）

   (a) 某生使用牛頓迭代法求某函式的根，但發現其所計算出來的收斂階數不為 2，而是接近 1，請問有此可能嗎？

   (b) 某生利用 secant method 求根法來撰寫程式，請問他該如何驗證其程式是否正確？

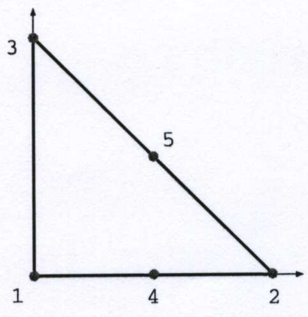
   (c) 請解釋為何使用 n 個點的高斯積分法，可對 2n-1 次的多項式函數都沒有 truncation error。

   (d) 要印出等差數列 0, 0.1, 0.2 一直到 0.9 為止，若 x 為雙精確度浮點數，請問以下的程式是否有問題：

```
for ( x = 0 ; x != 1 ; x = x + 0.1 )  cout << x << endl ;
```

2. (a) 寫出在一維空間上 n 個座標點上 Lagrange 插分多項式 (interpolating function) 的一般式並證明其和為 1。

   (b) 以下的三角形區域內，函式 u(x,y) 使用五個點來做插分， $u(x,y)=\sum_{i=1}^{5} u_i\, L_i(x,y)$，$u_i$ 為 u(x,y) 函式在各座標點上的數值，$L_i(x,y)$ 為各點的插分多項式。已知五個點的座標分別為 (0,0), (1,0), (0,1), (0.5,0), (0.5,0.5)，請寫出在各座標點上的 $L_i(x,y)$。



3. 某使用 central difference 公式估算某函數 f(x) 的一次微分值，若 $\tilde{f}(x)$ 為函數 f(x) 在計算機裡的代表數值，

(a) 證明在考慮數值方法的 truncation error 與電腦系統的 round-off error 影響下，數值微分的真實誤差為：

$$\left| f'(x) - \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} M + \frac{\varepsilon}{h}$$

M 為 $|f'''(x)|$ 的上界，ε 為計算機在計算函數 f(x) 時所產生的 round-off error 的最大值。

(b) 證明最佳的 h 為 $\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$，使得數值微分值最逼近真正數值。

4. (a) 使用梯形法求 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的數值積分，若 h 為梯形寬，則梯形法的 truncation error 為 $-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$，$\xi$ 為在 [a,b] 之間的點。若 $\tilde{f}(x)$ 為函數 f(x) 在計算機裡的代表數值，請證明梯形法的真正數值誤差為

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left(\tilde{f}(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}(x_i) + \tilde{f}(b) \right) \right| \le \frac{b-a}{12} h^2 M + (b-a)\varepsilon$$

這裡 $|f''(x)| \le M$，ε 為計算機在計算函數 f(x) 所產生的 round-off error 的最大值。

(b) 有一多項式函數 f(x) 的積分公式如下：

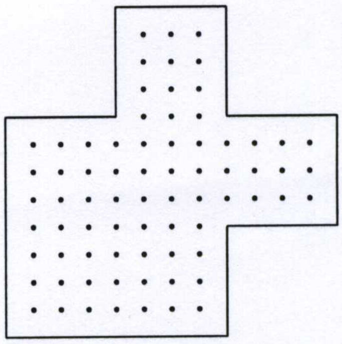
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = a\,f(-1) + b\,f(d) + c\,f(1)$$

請問 a，b，c，d 的值為何？

5. 對 x 與 y 方向分別使用三點的中間微分差分公式計算以下邊界值問題的數值解：

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 3xy + 5$$

右圖為計算區域與相關的格點分佈，A 為其所組出的矩陣。



(a) A 矩陣的非零元素與零元素各為多少個？

(b) 若格點的排列順序為由下到上，由左到右，則 A 矩陣的 bandwidth 為多少？同時矩陣的 bandwidth 出現在哪些格點上，請畫出來？(註：diagonal matrix 的 bandwidth 為 1，tridiagonal matrix 的 bandwidth 為 3)